E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD (phys II) 1980

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, $\mathbb{R}^+$ le sous-ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit une fonction $\varphi : t \longmapsto \varphi(t)$, définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant les conditions :

$\varphi(0) = 0$,

$\varphi'(t) \leqslant c + k\varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, c et k étant deux constantes ($k \neq 0$).

Montrer que la fonction φ satisfait l'inégalité :

$$t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) \leqslant \frac{c}{k}(e^{kt} - 1)$$

(On pourra étudier $a(t) = \varphi(t)e^{-kt}$.)

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u + f(u) \tag{1}$$

où α est une constante et $f : u \longmapsto f(u)$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1° Montrer qu'une fonction $u : t \longmapsto u(t)$ continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ est solution de l'équation (1) si et seulement si elle vérifie la relation (1') :

$$u(t) = e^{-\alpha t}u(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau} f(u(\tau))\,d\tau \tag{1'}$$

2° *On suppose la constante α strictement positive et la fonction f vérifiant la propriété* (P) :

(P) Il existe deux nombres a et k, $a > 0$, $\alpha > k > 0$ tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad |u| \leqslant a \Rightarrow |f(u)| \leqslant k\,|u|.$$

a. Soit une solution $u : t \longmapsto u(t)$, de l'équation (1) définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant l'inégalité :

$$|u(t)| \leqslant a \quad \text{pour} \quad t \in [0, t_0] \text{ où } t_0 \text{ est un réel strictement positif.}$$

Démontrer l'inégalité :

$$t \in [0, t_0],\ |u(t)| \leqslant |u(0)|\,e^{-(\alpha-k)t}$$

(on pourra appliquer le résultat de la question préliminaire à la fonction $\varphi(t) = \int_0^t e^{\alpha\tau}|u(\tau)|\,d\tau$).

b. La solution étudiée satisfaisant toujours aux hypothèses précédentes, montrer qu'il existe un réel t_1, $t_1 > t_0$, tel que :

$$\forall t \in [0, t_1],\ |u(t)| \leqslant a$$

c. Déduire des questions précédentes, les deux propriétés suivantes :

i. Toute solution $u : t \longmapsto u(t)$ de l'équation (1), continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant la condition initiale $|u(0)| < a$, a une limite nulle quand t tend vers l'infini ($+\infty$).

ii. La fonction $u \equiv 0$ est l'unique solution de l'équation (1) définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant $u(0) = 0$.

DEUXIÈME PARTIE

On considère le système différentiel :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x - y + xg\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= x - \alpha y + yg\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où le nombre α est une constante et la fonction $g : u \longmapsto g(u)$ à valeurs réelles est continue sur $\mathbb{R}^+$.

.../...

1° On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Écrire le système différentiel (2') que vérifient les fonctions r et θ.

2° *On suppose la fonction g identiquement nulle.*

a. Donner la solution générale du système (2').

b. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe : $t \longmapsto (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$, où (x, y) est la solution du système (2) de conditions initiales : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

(Pour le tracé des courbes, on donnera à α successivement les valeurs numériques : $-\frac{1}{\pi}$, 0, $\frac{1}{\pi}$.)

3° *On suppose* $\alpha = 1$ *et la fonction* $g : u \longmapsto g(u)$, *définie par :*

$$g(u) = u$$

a. Expliciter la solution $(r, \theta) : t \longmapsto (r(t), \theta(t))$ du système (2') qui vérifie les conditions initiales :

$$r(0) = r_0 \quad (r_0 \geqslant 0), \qquad \text{et} \qquad \theta(0) = 0.$$

b. Dans un repère orthonormé, donner l'allure des courbes représentatives de la fonction $r : t \longmapsto r(t)$ selon les valeurs de r_0 ($r_0 \geqslant 0$).

4° *On suppose la constante* α *strictement positive et la fonction g définie par :*

$$g(u) = \mathrm{Log}(1 + u^2)$$

(Log représente la fonction logarithme népérien.)

a. Pour quelle valeur constante, non nulle, a_α, $r = a_\alpha$ est-elle solution du système (2') ?

b. Montrer que toute solution $r : t \longmapsto r(t)$ de (2') définie sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $0 \leqslant r(0) < a_\alpha$, a une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$.

(On pourra utiliser les résultats de I. 2°.)

c. Dans le cas où $\alpha = 1$, donner dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de $t \longmapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, où (x, y) est la solution du système (2) qui vérifie les conditions initiales : $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$. On envisagera les trois cas $0 \leqslant x_0 < a_1$, $x_0 = a_1$, $x_0 > a_1$ où a_1 est défini dans la question II 4° *a*.

On justifiera l'existence de solutions définies sur $\mathbb{R}^+$ pour le système (2').

5° *On suppose* $\alpha = 0$.

a. Exhiber une fonction $g : u \longmapsto g(u)$ continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle à l'origine, pour laquelle toutes les solutions du système (2') [non identiquement nulle] sont définies sur $\mathbb{R}^+$ et tendent vers l'infini lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Exhiber une fonction $g : u \longmapsto g(u)$ continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle à l'origine, pour laquelle toutes les solutions du système (2') sont définies sur $\mathbb{R}^+$ et tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail